Devoir Maison 1

Exercice 1

(D'après Maths C, Banque PT 2020)

Préambule

1. Soit n un entier naturel non nul, I un intervalle de $\mathbb{R}$, non vide, non réduit à un point, et a un point de I . Énoncer le théorème donnant la formule de Taylor-Young, pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I , au voisinage de a .
2. Rappeler le développement limité à l'ordre deux, au voisinage de zéro, de la fonction cosinus, en faisant le lien avec la formule de Taylor-Young.

Partie I

On considère la fonction ϕ qui, à tout réel x , associe :

$$\phi(x) = \frac{12 - 5x^2}{12 + x^2}; \quad \psi(x) = 1 - \frac{6x^2}{12 + x^2}$$

1. Étudier la parité de la fonction ϕ . Que peut-on en déduire pour le domaine d'étude, et pour sa courbe représentative ?
2. Comparer, pour tout réel x , $\phi(x)$ et $\psi(x)$.
3. Calculer, pour tout réel x : $\phi'(x)$ (On utilisera les résultats des questions précédentes pour faire le calcul le plus simplement possible).
4. Donner le tableau de variations de la fonction ϕ sur $\mathbb{R}$ (on fera figurer les limites de ϕ aux bornes du domaine d'étude).
5. Donner les développements limités à l'ordre 4 en 0 de la fonction ϕ . Que constate-t-on ?
6. On donne les valeurs approchées :

$$\phi(\pi) \approx -1,71 \text{ et } 2\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 1,54.$$

Tracer, sur un même graphique, sur la feuille de papier millimétré fournie, avec l'échelle : 3 cm pour une unité, la courbe représentative de la fonction ϕ sur $[-\pi, \pi]$, et la courbe représentative de la fonction cosinus sur $[\pi, \pi]$. Que remarque-t-on ?

Partie II

Dans cette partie, on cherche à déterminer les fonctions h , continues en 0, prenant la valeur 1 en zéro, telles que, pour tout réel x :

$$h(2x) = h(x) \cos(\pi x)$$

1. Pour tout réel a , exprimer $\sin(2a)$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , et pour tout réel x :

$$\sin(\pi x) = 2^n \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \prod_{k=1}^n \cos\left(\frac{\pi x}{2^k}\right).$$

3. Montrer que, pour toute solution h , tout entier naturel non nul n , et pour tout réel x :

$$h(x) = h\left(\frac{x}{2^n}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) \cdots \cos\left(\frac{\pi x}{2^2}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

4. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n , et pour tout réel x :

$$h(x) \sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^n} h\left(\frac{x}{2^n}\right) \sin(\pi x).$$

5. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

6. Pour tout réel x non nul, déterminer la valeur de

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} \frac{x}{\sin\left(\frac{\pi x}{2^n}\right)}.$$

7. Déduire des résultats précédents l'expression, pour tout réel x , de $h(x)$ en fonction de x .